

Dossier 4t ESO. Curs 2019-2020

UD 1. Nombres reals, potències i radicals.

Índex:

1. Els conjunts numèrics.
2. Aproximació. Errors d'aproximació.
3. Intervals.
4. Potències d'exponent enter.
5. Potències d'exponent fraccionari, radicals.
6. Operacions i simplificació de radicals.
7. Racionalització.
8. Notació científica.

Setmanes: 3 (12 sessions)

4 Potències d'exponent enter.

4.1 El llenguatge dels exponents positius i negatius.

Potències amb exponents positius, zero i negatius.

Si a és un nombre real diferent de 0, i n és un nombre natural, definim:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vegades}}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vegades}}}$$

En particular, tenim:

$$a^1 = a \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

4.1.1 Escribeu en forma de fracció simplificada:

- a) 5^{-2}
- b) 2^{-3}
- c) $(-3)^2$
- d) $(-5)^{-2}$

4.1.2 Escribeu en forma de fracció simplificada totes les possibles combinacions següents:

- a) 3^2
- b) $(-3)^2$
- c) 3^{-2}
- d) $(-3)^{-2}$

4.1.3 Expressa aquestes fraccions com a potència d'exponent negatiu:

- a) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$
- b) $\left(\frac{1}{8}\right)^3$
- c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3$
- d) $\left(\frac{2}{-7}\right)^2$

4.1.4 Escribeu com a producte de potències de base entera:

- a) $\frac{3}{7}$
- b) $\frac{-9}{16}$

4.1.5 Observació important: Atenció als parèntesis! $-a^n \neq (-a)^n$

Calcula i comprova que no són iguals:

- a) -3^3 i $(-3)^3$
- b) -2^5 i $(-2)^5$
- c) -1^5 i $(-1)^5$

Però que passa si l'exponent és parell?

Calcula i comprova que sí son iguals:

- a) -3^2 i $(-3)^2$
- b) -2^4 i $(-2)^4$
- c) -1^6 i $(-1)^6$

4.2 Propietats de les potències.

a) Producte i quocient de potències de la mateixa base.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

b) Potència d'un producte i potència d'un quocient.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (\text{suposant que } b \neq 0)$$

c) Potència d'una potència.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4.2.1 Expressa el resultat com una potència.

a) $2^{-4} \cdot 2^7 \cdot 2^{-3}$

b) $(-3)^4 : (-3)^2 \cdot (-3)$

c) $-5^{-3} \cdot 5^7 : 5^{-2}$

d) $\frac{3^5}{3^2}$

e) $(7^4)^{-3}$

4.2.2 Expressa en forma d'una única potència.

a) $\frac{1}{3} : 3^4 : \frac{1}{3^7}$

b) $\left(\frac{-1}{7}\right)^4 \cdot 7^{-5} \cdot \frac{1}{7^{-2}}$

c) $(-4)^3 : \left(\frac{-1}{4}\right)^5 \cdot 4^{-1}$

4.2.3 en forma d'una única potència.

a) $\frac{(3^{-2} : 3^4) \cdot 3^8}{3^{-5}}$

b) $\frac{(5^3 \cdot 5^{-2}) : 5^{-4}}{5^{-7} : 5^2}$

4.2.4 Calcula aplicant les propietats de les potències:

a) $\frac{14^3}{7^2}$

b) $\frac{9^2}{3^5}$

c) $\frac{4^5}{8^2}$

4.2.5 Simplifica les següents expressions. Les respostes només poden tenir exponents positius.

a) $2m^2 \cdot 2m^3$

b) $m^4 \cdot 2m^{-3}$

c) $4x^{-3} \cdot 2x^2$

d) $4n^4 \cdot 2n^{-3}$

e) $2k^4 \cdot 4k$

f) $2x^3y^{-3} \cdot 2x^{-1}y^3$

g) $2y^2 \cdot 3x$

h) $4v^3 \cdot vu^2$

i) $4a^3b^2 \cdot 3a^{-4}b^{-3}$

j) $x^2y^{-4} \cdot x^3y^2$

k) $(x^2)^0$

l) $(2x^2)^{-4}$

m) $(4h^0)^4$

n) $(4a^3)^2$

o) $(3k^4)^4$

p) $(4xy)^{-1}$

q) $(2b^4)^{-1}$

r) $(x^2y^{-1})^2$

s) $(2x^4y^{-3})^{-1}$

t) $(3m)^{-2}$

$$u) \frac{x^2}{2x^3}$$

$$v) \frac{x^{-1}}{4x^4}$$

$$w) \frac{3n^4}{3n^3}$$

$$x) \frac{m^4}{2m^4}$$

$$y) \frac{3m^{-4}}{m^3}$$

$$z) \frac{2x^4y^{-4}z^{-3}}{3x^2y^{-3}z^4}$$

$$aa) \frac{4x^0y^{-2}z^3}{4x}$$

$$ab) \frac{2h^3j^{-3}k^4}{3jk}$$

$$ac) \frac{4m^4n^3p^3}{3m^2n^2p^4}$$

$$ad) \frac{3x^3y^{-1}z^{-1}}{x^{-4}y^0z^0}$$

4.2.6 Simplifica $\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^7}{3 \cdot 4^6}$

5 Potències d'exponent fraccionari, radicals.

5.1 Radicals escrits mitjançant exponents fraccionaris.

Tot radical es pot escriure com a potència d'exponent fraccionari:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

i amb aquesta notació es mantenen totes les propietats de les potències.

El nombre n s'anomena **índex** de l'arrel, i el nombre a s'anomena **radicand**.

Recordem que no existeixen arrels de base negativa i exponent parell. Per exemple, no existeixen $\sqrt{-2}$, ni $\sqrt[4]{-3}$, ni $\sqrt[6]{-1}$.

5.1.1 Escriu les següents expressions en forma de radicals:

$$a) 7^{1/2} \quad \sqrt{7} \quad b) 4^{4/3} \quad (\sqrt[3]{4})^4$$

$$c) 2^{5/3} \quad (\sqrt[3]{2})^5$$

$$d) 2^{1/6} \quad \sqrt[6]{2}$$

5.1.2 Escriu les següents expressions en forma exponencial:

$$a) (\sqrt{10})^3 \quad b) (\sqrt[4]{5})^5 \quad c) \sqrt[3]{2}$$

5.1.3 Simplifica:

$$a) 9^{1/2}$$

$$b) 1000000^{1/6}$$

$$c) 36^{3/2}$$

6 Operacions i simplificació de radicals.

6.1 Simplificació de radicals simples.

Per simplificar un radical, l'expressem en forma de potència d'exponent fraccionari i simplifiquem la fracció de l'exponent.

Per exemple, volem simplificar $\sqrt[3]{64}$:

$$\sqrt[3]{64} = 64^{1/3} = (2^6)^{1/3} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

6.1.1 Simplifica els següents radicals.

a) $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[5]{32}$ c) $\sqrt[4]{-256}$ d) $\sqrt[3]{-1000}$

6.1.2 Exemples resolts. Simplificació de radicals amb extracció de factors.

Observa el següent exemple:

a) $\sqrt{8} = \sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 2} = \sqrt[2]{2^2} \cdot \sqrt[2]{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$

6.1.3 Extreu factors fora dels radicals:

a) $\sqrt{2^8 \cdot 3^7}$ b) $\sqrt[3]{3^{10} \cdot 5^6}$ c) $\sqrt[15]{3^5 \cdot 7^4}$

6.1.4 Simplifica els següents radicals:

a) $\sqrt{48}$

d) $\sqrt{125}$

g) $\sqrt{288}$

b) $\sqrt{75}$

e) $\sqrt{648}$

c) $\sqrt{12}$

f) $\sqrt{72}$

6.1.5 Simplifica els següents radicals:

a) $\sqrt{252}$

b) $\sqrt{24}$

c) $-8\sqrt{384}$

d) $7\sqrt{175}$

6.2 Simplificació de sumes de radicals.

Només es poden simplificar les sumes i restes de radicals que siguin semblants. Si ho són, se sumen o es resten els coeficients i els radicals es deixen iguals.

Exemples:

$$\text{a) } 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = (4 + 5 - 7)\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} + 11\sqrt[3]{4} = (1 - 3 + 11)\sqrt[3]{4} = 9\sqrt[3]{4}$$

Si no podem operar, es deixa l'operació indicada:

$$3\sqrt{2} + 7\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}$$

$$11\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{7} = 11\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{7}$$

6.2.1 Exercici. Fes aquestes sumes i restes de radicals:

$$\text{a) } 6\sqrt{3} + 11\sqrt{3}$$

$$\text{b) } 4\sqrt{10} - 2\sqrt{10}$$

$$\text{c) } -7\sqrt[3]{5} - 12\sqrt[3]{5}$$

$$\text{d) } 2\sqrt{9} + 12\frac{\sqrt{9}}{3}$$

6.2.2 Exercici. Fes les següents operacions i simplifica el resultat:

$$\text{a) } \sqrt{8} - 3\sqrt{8} + 7\sqrt{8}$$

$$\text{f) } \sqrt{6} + \sqrt{24}$$

$$\text{b) } -\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$$

$$\text{g) } 3\sqrt{54} + 2\sqrt{24}$$

$$\text{c) } -3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$\text{h) } -\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - \sqrt{18}$$

$$\text{d) } 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$\text{i) } 3\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - \sqrt{54}$$

$$\text{e) } 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{5}$$

6.2.3 Exercici. Fes les següents operacions i simplifica el resultat:

$$\text{a) } -\sqrt{8} - 4\sqrt{200}$$

$$\text{e) } 4\sqrt{6} - 3\sqrt{50} - 5\sqrt{18}$$

$$\text{b) } -2\sqrt{80} + 2\sqrt{45}$$

$$\text{f) } -4\sqrt{96} - 5\sqrt{6} + 4\sqrt{5}$$

$$\text{c) } -2\sqrt{28} - 3\sqrt{112}$$

$$\text{g) } -3\sqrt{50} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{7}$$

$$\text{d) } 5\sqrt{2} - 3\sqrt{18} - 5\sqrt{32}$$

6.3 Reducció de radicals a índex comú.

Per reduir radicals a un índex comú trobem el mínim comú múltiple dels respectius índexs.

Exemple: Redueix a índex comú $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{7}$

El mínim comú múltiple de 2 i 3 és 6, per tant:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \rightarrow \sqrt{5} = 5^{1/2} = 5^{3/6} = \sqrt[6]{5^3} \\ \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \rightarrow \sqrt[3]{7} = 7^{1/3} = 7^{2/6} = \sqrt[6]{7^2} \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt[6]{5^3} \text{ i } \sqrt[6]{7^2}$$

6.3.1 Redueix a índex comú les següents parelles de radicals:

a) $\sqrt[3]{11}$ i $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{5}$ i $\sqrt[5]{7}$

6.4 Simplificació de producte i divisió de radicals.

Per multiplicar o dividir radicals, primer es redueixen a índex comú i després es multipliquen o es divideixen els radicands.

Exemple:

a) $\sqrt[7]{5^2} \cdot \sqrt[7]{5^3} = \sqrt[7]{5^2 \cdot 5^3} = \sqrt[7]{5^5}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3 2^2}$

6.4.1 Fes les següents operacions:

a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[4]{3}$

6.4.2 Simplifica:

a) $3\sqrt{12} \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$

c) $\sqrt{5} \cdot (-4\sqrt{5})$

d) $-4\sqrt{15} \cdot (-\sqrt{3})$

6.4.3 Simplifica:

a) $\frac{\sqrt{15}}{5\sqrt{20}}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{100}}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{27}}$

d) $\frac{3\sqrt{20}}{2\sqrt{4}}$

6.5 Operacions combinades amb radicals.

6.5.1 Calcula:

a) $\sqrt{3}(5 + \sqrt{3})$

b) $2\sqrt{5}(\sqrt{6} + 2)$

c) $-3\sqrt{3}(2 + \sqrt{6})$

d) $\sqrt{3}(-5\sqrt{10} + \sqrt{6})$

6.5.2 Calcula:

a) $-3\sqrt{15}(5 + \sqrt{3})$

b) $3\sqrt{5}(\sqrt{5} + 3)$

c) $(4\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} - 2)$

d) $(3\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

6.5.3 Suma per diferència amb arrels. Calcula:

a) $(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)$

b) $(\sqrt{2} + 5)(\sqrt{2} - 5)$

c) $(\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3)$

d) $(\sqrt{5} + 4)(\sqrt{5} - 4)$

e) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

f) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})(\sqrt{2} - \sqrt{7})$

6.5.4 Calcula:

a) $(-2\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 5)$

b) $(5 - 4\sqrt{5})(-2 + \sqrt{5})$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$

d) $(5 + 4\sqrt{3})(3 + \sqrt{3})$

7 Racionalització.

Racionalitzar una fracció amb radicals al denominador és trobar una fracció equivalent sense radicals al denominador.

7.1 Racionalització amb un sol radical al denominador.

Per racionalitzar una fracció del tipus $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}}$ multipliquem el numerador i el denominador per $\sqrt[n]{b^{n-k}}$

En efecte:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} \frac{\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^k} \sqrt[n]{b^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^k b^{n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^{k+n-k}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b}$$

i ens queda una fracció equivalent sense cap radical al denominador.

Exemple resolt. Racionalitza $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Hem de multiplicar numerador i denominador per $\sqrt{5^{2-1}} = \sqrt{5}$

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

7.1.1 Simplifica:

- a) $\frac{4}{\sqrt{5}}$
- b) $\frac{\sqrt{4}}{5\sqrt{3}}$
- c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$
- d) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

7.1.2 Simplifica:

- a) $\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{5}}$
- b) $\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$

7.2 Racionalització amb un binomi al denominador.

Per racionalitzar una fracció amb un binomi al denominador multiplicarem numerador i denominador pel **conjugat** del denominador; és a dir, si el denominador és una suma $A + B$, multiplicarem per la resta $A - B$, i viceversa.

Exemple resolt: Racionalitza la fracció $\frac{3}{\sqrt{2} + 4}$

El conjugat de $\sqrt{2} + 4$ és $\sqrt{2} - 4$. Per tant:

$$\frac{3}{\sqrt{2} + 4} = \frac{3}{\sqrt{2} + 4} \cdot \frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2} - 4} = \frac{3(\sqrt{2} - 4)}{(\sqrt{2} + 4)(\sqrt{2} - 4)} = \frac{3(\sqrt{2} - 4)}{(\sqrt{2})^2 - 4^2} = \frac{3(\sqrt{2} - 4)}{2 - 16} = \frac{3(\sqrt{2} - 4)}{-14}$$

7.2.1 Racionalitza les fraccions següents:

- a) $\frac{3}{4 + 4\sqrt{5}}$
- b) $\frac{5}{5 + 3\sqrt{3}}$
- c) $\frac{\sqrt{5} + 3}{4 - \sqrt{5}}$
- d) $\frac{2 + 5\sqrt{3}}{4\sqrt{2} - 4}$
- e) $\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{4 - \sqrt{5}}$

7.2.2 Racionalitza les fraccions següents:

- a) $\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$
- b) $\frac{4}{\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}$

7.2.3 Racionalitza les fraccions següents:

- a) $-\frac{2}{5 + \sqrt{3}}$
- b) $\frac{2}{-2 - 5\sqrt{2}}$

7.2.4 Racionalitza les fraccions següents:

a) $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{9}}$

b) $\frac{-4+\sqrt{3}}{3\sqrt{9}}$

c) $\frac{4+2\sqrt{3}}{5\sqrt{4}}$

d) $\frac{2\sqrt{3}-2}{2\sqrt{16}}$

e) $\frac{2-5\sqrt{5}}{4\sqrt{13}}$

f) $\frac{\sqrt{5}+4}{4\sqrt{17}}$

g) $\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

h) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$

i) $\frac{5}{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

j) $\frac{5}{\sqrt{3}+4\sqrt{5}}$

k) $\frac{2}{5+\sqrt{2}}$

l) $\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

m) $\frac{3}{4-3\sqrt{3}}$

n) $\frac{4}{\sqrt{2}-2}$

o) $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$

p) $\frac{2}{2\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$

q) $-\frac{4}{4-4\sqrt{2}}$

r) $\frac{4}{4\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

s) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

t) $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

u) $\frac{\sqrt{14}-2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

v) $\frac{2+\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

7.2.5* Racionalització d'expressions algèbriques.

a) $\frac{\sqrt{ab}-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$

b) $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

c) $\frac{ab}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} \quad \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}$

d) $\frac{a-b}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}} \quad \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{ab}$

7.2.6* Simplifica:

a) $\sqrt{\frac{24x^3}{8y}}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2y}}$

c) $(\sqrt{2x}-7)^2$

8 Notació científica.

8.1.1 Completa la següent taula amb les potències de 10. Què observes?

k	10^k
5	
4	
3	
2	
1	
0	
-1	
-2	
-3	

Direm que un nombre real està escrit en **forma científica** quan estigui expressat de la forma $a \cdot 10^k$, on:

a és un nombre de l'interval $[1,10)$, que s'anomena **mantissa**,

k és un nombre enter que s'anomena **ordre de magnitud**.

8.1.2 Escribe en notació científica:

- a) 0.000000786
- b) 3940
- c) 4.7
- d) 1260000
- e) 0.06
- f) 175

8.1.3 Escribe en notació convencional:

- a) $6.17 \cdot 10^3$
- b) $7 \cdot 10^4$
- c) $7.31 \cdot 10^6$
- d) $5.4 \cdot 10^{-8}$
- e) $6.7 \cdot 10^{-3}$
- f) $9.59 \cdot 10^2$

8.1.4 Escribe en notació científica:

- a) $0.2 \cdot 10^6$
- b) $30 \cdot 10^{-8}$
- c) $88.4 \cdot 10^3$
- d) $28.8 \cdot 10^{-9}$

8.1.5 Escribe en notació científica:

- a) 0.000006
- b) 5400000
- c) 60
- d) 0.0000002
- e) 2000000
- f) $71 \cdot 10^3$

g) 0.0000009

h) $0.63 \cdot 10^1$

i) 0.000216

j) 0.0042

8.1.6 Escriu en notació convencional:

a) $0.9 \cdot 10^{-1}$

b) $2 \cdot 10^{-1}$

c) $2 \cdot 10^5$

d) $804 \cdot 10^2$

e) $2.66 \cdot 10^4$

f) $1.5 \cdot 10^{-2}$

g) $7.75 \cdot 10^{-1}$

h) $8.3 \cdot 10^7$

i) $4 \cdot 10^0$

j) $4 \cdot 10^{-5}$

Solutions.

4.2.5 a) $4m^5$ b) $2m$ c) $\frac{8}{x}$ d) $8n$ e) $8k^5$ f) $4x^2$ g) $6y^2x$
h) $4v^4u^2$ i) $\frac{12}{ab}$ j) $\frac{x^5}{y^2}$ k) 1 l) $\frac{1}{16x^8}$ m) 256
n) $16a^6$ o) $81k^{16}$ p) $\frac{1}{4xy}$ q) $\frac{1}{2b^4}$ r) $\frac{x^4}{y^2}$ s) $\frac{y^3}{2x^4}$
t) $\frac{1}{9m^2}$ u) $\frac{1}{2x}$ v) $\frac{1}{4x^5}$ w) n x) $\frac{1}{2}$ y) $\frac{3}{m^7}$
z) $\frac{2x^2}{3yz^7}$ aa) $\frac{z^3}{y^2x}$ ab) $\frac{2h^3k^3}{3j^4}$ ac) $\frac{4m^2n}{3p}$ ad) $\frac{3x^7}{yz}$

4.2.6 $\frac{1}{12}$

5.1.2 a) $10^{3/2}$ b) $5^{5/4}$ c) $2^{1/3}$

5.1.3 a) 3 b) 10 c) 216

6.1.4 a) $4\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $5\sqrt{5}$
e) $18\sqrt{2}$ f) $6\sqrt{2}$ g) $\sqrt{12\sqrt{2}}$

6.1.5 a) $6\sqrt{7}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $-64\sqrt{6}$ d) $35\sqrt{7}$

6.2.2 a) b) $2\sqrt{3}$ c) $-6\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{5}-2\sqrt{6}$
f) $3\sqrt{6}$ g) $13\sqrt{6}$ h) $\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ i) $2\sqrt{3}-3\sqrt{6}$

6.2.3 a) $-42\sqrt{2}$ b) $-2\sqrt{5}$ c) $-7\sqrt{3}$ d) $-24\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{6}-30\sqrt{2}$
f) $-21\sqrt{6}+4\sqrt{5}$ g) $-17\sqrt{2}+4\sqrt{7}$

6.4.2 a) $18\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{2}$ c) -40 d) $12\sqrt{5}$

6.4.3 a) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

6.5.1 a) $5\sqrt{3}+3$ b) $2\sqrt{30}+4\sqrt{5}$ c) $-6\sqrt{3}-9\sqrt{2}$ d) $-5\sqrt{30}+3\sqrt{2}$

6.5.2 a) $-15\sqrt{15}-9\sqrt{5}$ b) $15+9\sqrt{5}$ c) $26-11\sqrt{5}$ d) $18+4\sqrt{15}$

6.5.3 a) 4 b) -23 c) -7 d) -11 e) -2 f) -5

6.5.4 a) $12\sqrt{3}-16$ b) $13\sqrt{5}-30$ c) 2 d) $27+17\sqrt{3}$

7.1.1 a) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

7.1.2 a) $\frac{4\sqrt{15}}{25}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

7.2.1 a) $\frac{3\sqrt{5}-3}{16}$ b) $\frac{15\sqrt{3}-25}{2}$ c) $\frac{7\sqrt{5}+17}{11}$ d) $\frac{2+2\sqrt{2}+5\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{4}$
e) $\frac{4\sqrt{5}+5+8\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{11}$

7.2.2 a) b) $\frac{-4\sqrt{2}-20\sqrt{3}}{73}$

7.2.3 a) $\frac{\sqrt{3}-5}{11}$ b) $\frac{2-5\sqrt{2}}{23}$

7.2.4 a) $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{-4+\sqrt{3}}{12}$ c) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ e) $\frac{2\sqrt{13}-5\sqrt{65}}{52}$
f) $\frac{\sqrt{85}+4\sqrt{17}}{68}$ g) $\frac{\sqrt{6}-9}{3}$ h) $\frac{\sqrt{30}-2\sqrt{3}}{18}$ i) $\frac{15\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{43}$
j) $\frac{-5\sqrt{3}+20\sqrt{5}}{77}$ k) $\frac{10-2\sqrt{2}}{23}$ l) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ m) $\frac{-12-9\sqrt{3}}{11}$
n) $-2\sqrt{2}-4$ o) $3-\sqrt{5}$ p) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ q) $1+\sqrt{2}$ r) $\frac{16\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{43}$
s) $\sqrt{2}-1$ t) $3+2\sqrt{3}$ u) $\sqrt{2}$ v) $\sqrt{2}$

7.2.5 a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{a}$ c) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{a-b}$ d) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{ab}$

7.2.6 a) $\frac{x\sqrt{3xy}}{y}$ b) $\frac{\sqrt{6y}}{2y}$ c) $2x-14\sqrt{2x}+49$

8.1.2 a) $7.86 \cdot 10^{-7}$ b) $3.94 \cdot 10^3$ c) $4.7 \cdot 10^0$ d) $1.26 \cdot 10^6$ e) $6 \cdot 10^{-2}$
f) $1.75 \cdot 10^2$

8.1.3 a) 6170 b) 70000 c) 7310000 d) 0.000000054
e) 0.0067 f) 959

8.1.4 a) $2 \cdot 10^5$ b) $3 \cdot 10^{-7}$ c) $8.84 \cdot 10^4$ d) $2.88 \cdot 10^{-8}$

8.1.5 a) $6 \cdot 10^{-6}$ b) $5.4 \cdot 10^6$ c) $6 \cdot 10^1$ d) $2 \cdot 10^{-7}$

e) $2 \cdot 10^6$ f) $7.1 \cdot 10^4$ g) $9 \cdot 10^{-7}$ h) $6.3 \cdot 10^0$ i) $2.16 \cdot 10^{-4}$
j) $4.2 \cdot 10^{-3}$

8.1.6 a) 0.09 b) 0.2 c) 20000 d) 80400 e) 26600
 f) 0.015 g) 0.775 h) 83000000 i) 4 j) 0.00004