

Dossier 4t ESO. Curs 2019-2020

Tema 2: Polinomis i fraccions algebraiques.

1. Definició d'un polinomi
2. Potència d'un binomi. Triangle de Tartaglia
3. Ruffini, arrels i factorització
4. Fraccions algebraiques.

Tema 2: Polinomis i fraccions algebraiques.

1 Definició d'un polinomi.

Un **monomi** en una indeterminada x és una expressió de la forma ax^n , on a és un nombre real anomenat **coeficient**, i n és un nombre natural anomenat **grau** del monomi.

Un **polinomi** en una indeterminada x és qualsevol suma de monomis, és a dir, és una expressió de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

El **grau** d'un polinomi és l'exponent més gran de la indeterminada x . El **coeficient principal** d'un polinomi és el coeficient del terme amb l'exponent més gran. El **terme independent** és el que no duu indeterminada.

Els polinomis són una subclasse de les expressions algebraiques:

Una **expressió algebraica** és qualsevol expressió matemàtica formada amb les quatre operacions: Suma, resta, multiplicació i divisió, els nombres reals i unes lletres que simbolitzen quantitats numèriques desconegudes.

Per exemple, són expressions algebraiques $5x^7$, $\frac{a+2b}{c}$, $n - \left(\frac{a+x}{3y}\right)$

Però no són expressions algebraiques expressions com $\sin(x)$, $\sqrt{x+1}$, $|3a+1|$, o 2^x

Valor numèric i expressions algèbriques.

El valor numèric d'un polinomi és el valor que s'obté en substituir la indeterminada x per un nombre donat.

Per exemple:

Donat el polinomi $p(x) = 3x^2 - 5x + 3$

Si $x = 4$, llavors $p(4) = 3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 31$

Si $x = -5$, llavors $p(-5) = 3 \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 3 = 103$

Determina els valors numèrics del següent polinomi per als valors indicats:

a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

$x = 3$

$x = 1$

b) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

$x = 0$

$x = -1$

Calcula el valor numèric de les expressions següents en els valors que s'indica:

a) $3x$, si $x = -4$

b) $2a + 4b$, si $a = 6$ i $b = 0$

c) $5x^2 - 3$, quan $x = 3$

d) $-9a^3 - 4a^2$, en el cas que $a = -1$

e) $3x^2 + 4x^3$, si $x = -2$

f) $3x^2 - 1$, quan $x = \frac{1}{2}$

g) $\frac{a+b}{3}$ si $a = 3$ i $b = -10$

h) $-x^2 + \frac{25}{9}$, quan $x = -\frac{5}{3}$

Calcula el valor numèric de les expressions següents en els valors que s'indica:

a) $-5x + 2$, $x = -6$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$

b) $2a^3 - a^2$, $a = 4$, $a = -2$, $a = -\frac{3}{2}$

c) $\frac{x}{2} - x^2$, $x = -3$, $x = \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^3$, $x = -6$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$

e) $\frac{x+y}{2}$, $x = -4$ i $y = -10$, $x = 2$ i $y = 0$

f) $-2x^2 - \frac{x}{3}$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1$, $x = \frac{4}{3}$

Calcula el valor numèric de les expressions següents en els valors que s'indica:

$$\text{a) } \frac{a}{3} - \frac{2}{b} \quad a = \frac{2}{3} \text{ i } b = 2 \quad \text{b) } 3x^2 - 2x + 10 \quad x = -2$$

$$\text{c) } 3x - \frac{2}{3}y \quad x = 3 \text{ i } y = 6 \quad \text{d) } 3a + 2a^2 \quad a = \frac{3}{2}$$

$$\text{e) } -5a + 3 \quad a = -7/5$$

El mètode de Ruffini.

Observa el següent exemple:

Donat el polinomi $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 9$, volem obtenir el valor numèric per a $x = -2$

Amb el mètode convencional:

$$f(-2) = 3(-2)^4 - 7(-2)^3 + 2(-2)^2 - 5(-2) + 9 = 131$$

Amb el mètode de Ruffini:

	3	-7	2	-5	9
-2		-6	26	-56	122
	3	-13	28	-61	131

Quin dels dos mètodes et sembla millor?

El "mètode de Ruffini" és un mètode mecànic per a avaluar polinomis sense haver de calcular les potències de la variable x.

Avalua els següents polinomis amb el mètode de Ruffini:

$$\text{a) } 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 1 \quad \text{per a } x = 2, \text{ per a } x = -3$$

$$\text{b) } 5x^3 + 2x^2 + 7x - 3 \quad \text{per a } x = 2, \text{ per a } x = -1$$

$$\text{c) } x^7 - 4x^2 + 1 \quad \text{per a } x = 1, \text{ per a } x = -1$$

Suma, resta i multiplicació de polinomis.

Sumem o restem els monomis semblants i ordenem. Exemples :

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 3x^2 - 7x + 11 \\ q(x) = 2x^2 - 4x - 5 \end{array} \right\} \Rightarrow p(x) + q(x) = 5x^2 - 11x + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 7x^2 + 4x + 6 \\ q(x) = 3x^2 + x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow p(x) - q(x) = 4x^2 + 3x + 4$$

Donats els polinomis $p(x) = 7x^3 - 6x^2 + x - 2$ i $q(x) = 3x^4 - x^3 + 9x^2 - 5x + 4$, calcula $p(x) + q(x)$ i $p(x) - q(x)$.

Multiplicació d'un monomi per un polinomi.

Per multiplicar un monomi per un polinomi apliquem la propietat distributiva: Hem de multiplicar el monomi de fora per tots els elements de l'interior del parèntesi.

Calcula:

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| a) $3 \cdot (a - 5)$ | b) $-2 \cdot (6 + 12a)$ | c) $11 \cdot (2a - 3)$ |
| d) $-7 \cdot (3 + 20b)$ | e) $4x \cdot (-12x + 6)$ | f) $a^2 \cdot (a - 12)$ |
| g) $-3a \cdot (a^2 - 6a - 7)$ | h) $2x^2 \cdot (-13x - 14)$ | i) $(15x + 4) \cdot (-3)$ |
| j) $(60x + 40) \cdot (-300)$ | k) $-11a \cdot (a^2 - 2a - 5)$ | l) $(8x + 300) \cdot (-30)$ |
| m) $(-50x^2 - 5) \cdot (-6x^2)$ | | |

Multiplicació de polinomis.

La multiplicació de dos polinomis és un altre polinomi de grau igual a la suma de graus dels factors. El polinomi s'obté en multiplicar cada terme d'un factor per cadascun dels termes de l'altre. És a dir, s'ha d'aplicar successivament la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma.

Calcula el producte de $p(x) = 3x^2 - 7x + 11$ i $q(x) = 2x^2 - 4x - 5$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} p(x) = 3x^2 - 7x + 11 \\ q(x) = 2x^2 - 4x - 5 \end{array} \right\} &\Rightarrow p(x) \cdot q(x) = (3x^2 - 7x + 11) \cdot (2x^2 - 4x - 5) = \\ &= 3x^2(2x^2 - 4x - 5) - 7x(2x^2 - 4x - 5) + 11(2x^2 - 4x - 5) = \\ &= 6x^4 - 12x^3 - 15x^2 - 14x^3 + 28x^2 + 35x + 22x^2 - 44x - 55 = \\ &= 6x^4 - 12x^3 - 14x^3 - 15x^2 + 22x^2 + 28x^2 - 44x + 35x - 55 = \\ &= 6x^4 - 26x^3 + 35x^2 - 9x - 20 \end{aligned}$$

Calcula: $(3x^2 + 5x + 2)(4x + 3)$

	$+3x^2$	$+5x$	$+2$
		$+4x$	$+3$
	$+9x^2$	$+15x$	$+6$
$12x^3$	$+20x^2$	$+8x$	
$12x^3$	$+29x^2$	$+23x$	$+6$

a) $(6x+1)(2x+3)$ b) $(4x+2)(5x+4)$ c) $(x^2+2x+3)(2x+1)$
d) $(5x^2+3x+4)(x+2)$ e) $(2x^2+x+9)(2x+6)$

a) $(6x^2 - 2x + 3)(x - 1)$ b) $(x^2 - x - 6)(2x + 8)$ c) $(-2x^2 + 4x - 3)(3x - 5)$
d) $(3x^2 - 9x - 7)(-x - 2)$ e) $(-5x^2 + 3x - 9)(-3x - 6)$

a) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + x + 1)$ b) $(2x^2 + 4x + 7)(x^2 + 5x + 3)$
c) $(x^2 + 8x + 2)(2x^2 + 3x + 5)$ d) $(3x^2 + 5x + 6)(2x^2 + 3x - 4)$

a) $x^3(x^2 + 3x - 1)$ b) $2x^5(2x^3 + 5x^2 - 7x + 3)$
c) $(x - 4)(4x^3 - 6x^2 - x - 4)$ d) $(2x + 1)(3x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 11x - 4)$
e) $(x^3 + 7)(x^5 - 2x^4 + 5x^3 + x^2 - 3x + 1)$ f) $(2x^2 + 5x)(x^3 + 7x^2 - 3x + 4)$
g) $(2x^2 + 4x - 3)(x^2 - 7x + 1)$ h) $(x^2 + 6x + 1)(2x^2 - 4x - 5)$

a) $(3x+1)^2$ b) $(2x^2-3)^2$ c) $(y^3-2y^2)^2$ d) $\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^2$

a) $(x+2)^3$ b) $(x^2-1)^3$

Identitats notables.

Les identitats notables són algunes igualtats que apareixen sovint, i que val la pena memoritzar-les.

Quadrat de la suma: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Quadrat de la diferència: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Suma per diferència: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Realitza les següents potències sense fer la multiplicació:

a) $(x+1)^2$ b) $(x+2)^2$ c) $(2x+1)^2$ d) $(3x+2)^2$ e) $(x^3+1)^2$ f) $(x^2+4)^2$

Escriu com a quadrat d'un binomi:

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $x^2 + 10x + 25$ c) $x^2 + 8x + 16$ d) $x^2 + 14x + 49$
e) $4x^2 + 12x + 9$ f) $25x^2 + 10x + 1$ g) $x^2 + 2xy + y^2$ h) $4x^4 + 16x + 16$
i) $9x^2 + 12xy + 4y^2$

Completa les expressions següents sabent que són desenvolupaments d'un binomi al quadrat:

a) $x^2 + \dots + 16$ b) $a^2 + \dots + 1$ c) $\dots + 12x + 9$ d) $\dots + 36x + 81$
e) $25x^2 + 10x + \dots$ f) $4a^2 + \dots + b^2$ g) $4a^6 + \dots + 25$ h) $16x^2 + 4x + \dots$

Realitza les següents potències sense fer la multiplicació:

a) $(x-1)^2$ b) $(x-2)^2$ c) $(3x-1)^2$ d) $(2x-3)^2$
e) $(x^2-1)^2$ f) $(x^3-3)^2$

Realitza les següents potències sense fer la multiplicació:

a) $x^2 - 6x + 9$ b) $4x^2 - 20x + 25$ c) $x^2 - x + \frac{1}{4}$ d) $4x^2 - 16x + 16$
e) $4x^2 - 20x + 25$ f) $9x^2 - 42x + 49$ g) $49 - 70x + 25x^2$ h) $9 - 24x + 16x^2$
i) $-20x + 25 + 4x^2$

Completa les expressions següents sabent que són desenvolupaments d'un binomi al quadrat:

a) $x^2 - 4x + \dots$ b) $a^2 - \dots + 4$ c) $\dots - 30x + 9$ d) $\dots - 60x + 25$
e) $25x^2 - 40x + \dots$ f) $4x^2 - 12xy + \dots$ g) $25x^4 - 40x^5 + \dots$ h) $\dots - 24x^3y + 9y^2$

Calcula sense fer la multiplicació:

a) $(4x^3 - 1)(4x^3 + 1)$ b) $(2a^3 + b^2)(2a^3 - b^2)$

Expressa com a suma per diferència les expressions següents:

a) $4x^2 - 25$ b) $9a^4 - 16b^2$ c) $16 - 25x^2$ d) $9x^2 - 25y^2$

Calcula:

a) $[(x+1)^2 - 2x]^2$ b) $[(x-1)^2 - x^2]^2$

Divisió de polinomis.

Donats dos polinomis $a(x)$ i $b(x)$, de manera que el grau de $a(x)$ sigui més gran o igual que el grau de $b(x)$, efectuar la divisió $a(x) \div b(x)$ es trobar dos polinomis $q(x)$ i $r(x)$ que verifiquin la igualtat

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{amb grau } r(x) < \text{grau } b(x)$$

$a(x)$ és el **divident**, $b(x)$ és el **divisor**, $q(x)$ és el **quocient** i $r(x)$ és el **residu**.

Dividim $a(x) = 6x^3 - 10x^2 + 7x - 7$ entre $b(x) = 3x - 2$

$6x^3$	$-10x^2$	$7x$	-7	$3x$	-2	
$6x^3$	$-4x^2$			$2x^2$	$-2x$	$+1$
$-----$	$-6x^2$	$7x$	-7			
	$-6x^2$	$4x$				
	$-----$	$3x$	-7			
		$3x$	-2			
		$-----$	-5			

El resultat és: Quocient: $q(x) = 2x^2 - 2x + 1$ i residu: $r(x) = -5$

Podem comprovar que, efectivament, $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

$$6x^3 - 10x^2 + 7x - 7 = (3x - 2)(2x^2 - 2x + 1) + (-5)$$

Realitza les següents divisions:

- a) $(x^3 + 2x + 1) : (x^2 + 3x - 2)$ b) $(x^3 - 19x - 30) : (x^2 - 2x - 15)$
 c) $(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x^2 + 2x - 3)$ d) $(x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8) : (x^2 + x - 2)$

Realitza les següents divisions:

- a) $(x^2 + 2x - 1) : (x + 1)$ b) $(2x^5 - 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x - 3) : (x^2 + x - 3)$
 c) $(x^8 - 1) : (x - 1)$

Divisió amb el mètode de Ruffini.

El mètode de Ruffini només serveix quan el divisor és de la forma $x - a$.

Exemple: Volem dividir el polinomi $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5$ entre $q(x) = x - 3$

Mètode convencional:	Mètode "Per Ruffini":
2x³ 2x³ -4x² -6x² -5 -5 </	

Divideix pel mètode convencional i per Ruffini, i escriu el quocient i el residu:

- a) $(x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 4):(x + 2)$ b) $(5x^5 - 16x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 13x - 8):(x - 3)$
c) $(x^7 - x^6 - x^3 - 4):(x - 1)$

Divideix pel mètode de Ruffini:

- a) $(2x^3 + 11x^2 - 3x - 41):(x + 5)$
b) $(6x^6 - 14x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x - 35):(x - 2)$
c) $(x^3 - 3x^2 + 5x - 2):\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Divideix pel mètode convencional i Per Ruffini:

- a) $(x^3 - 4x^2 + 3x + 5):(x - 2)$ b) $(2x^3 + 9x^2 + 11x + 7):(x + 3)$
c) $(x^6 + 2x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 29x^2 + x - 5):(x + 4)$
d) $(4x^6 - 4x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 6):(x - 1)$

Divideix pel mètode de Ruffini:

- a) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 5):(x - 3)$ b) $(x^4 + 7x^3 + 13x^2 - x - 17):(x + 4)$

Divideix pel mètode de Ruffini:

- a) $(2x^3 - 5x^2 + 3):(x - 2)$ b) $(x^4 - 3x^3 + 1):(x + 2)$
c) $(x^4 + 1):(x + 1)$ d) $(x^3 - x + 1):(x + 1)$
e) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1):(x - 1)$ f) $(x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 17x - 6):(x - 3)$

Divisibilitat de polinomis. El Teorema del Residu.

Direm que $p(x)$ és **divisible** entre $q(x)$ quan la divisió doni residu zero.

Equivalentment, direm que el polinomi $p(x)$ és **múltiple** del polinomi $q(x)$, o que el polinomi $q(x)$ és **divisor** del polinomi $p(x)$.

Exemple: El polinomi $p(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 7x - 3$ és divisible entre $q(x) = x^2 - 2x - 3$ perquè la divisió dóna residu 0:

x^4	$-5x^3$	$4x^2$	$7x$	-3	x^2-2x-3
x^4	$-2x^3$	$-3x^2$			x^2-3x+1
	$-3x^3$	$7x^2$	$7x$	-3	
	$-3x^3$	$6x^2$	$9x$		
		x^2	$-2x$	-3	
		x^2	$-2x$	-3	
				0	

Demostra que el polinomi $p(x) = x^5 - 5x^4 - 18x^3 + 38x^2 - 12x + 1$ és divisible pel polinomi $q(x) = x^2 - 7x + 1$.

Comprova que el polinomi $p(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16$

- a) És divisible pel polinomi $q(x) = x^2 + 3x - 4$
- b) No és divisible pel polinomi $r(x) = x - 4$
- c) És divisible pel polinomi $s(x) = x^2 - 4x + 4$
- d) No és divisible pel polinomi $t(x) = x + 3$.

Direm que un nombre a és una **arrel** del polinomi $p(x)$ quan $p(a) = 0$.

Fent la divisió:

$2x^4$	$-12x^3$	$23x^2$	$-31x$	12	$x-4$
$2x^4$	$-8x^3$				$2x^3-4x^2+7x-3$
	$-4x^3$	$23x^2$	$-31x$	12	
	$-4x^3$	$16x^2$			
		$7x^2$	$-31x$	12	
		$7x^2$	$-28x$		
			$-3x$	12	
			$-3x$	12	
				0	

Avaluant amb el mètode convencional:

$$p(4) = 2 \cdot 4^4 - 12 \cdot 4^3 + 23 \cdot 4^2 - 31 \cdot 4 + 12 = 512 - 768 + 368 - 124 + 12 = 0$$

Amb el mètode de Ruffini:

	2	-12	23	-31	12
4		8	-16	28	-12
	2	-4	7	-3	0

Problemes de divisibilitat.

1. Donat $p(x) = 3x^4 - mx^2 + 3x - 2$, sabem que $p(2) = 10$. Calcula el valor de m .
2. Dividint el polinomi $x^2 + bx + c$ per $x - 3$ obtenim 2 de resta. Quant valen b i c si aquest polinomi és divisible per $x - 2$?
3. Quin valor cal donar a k perquè el residu de la divisió de $8x^3 + 2x^2 + kx + 6$ per $2x - 1$ sigui 3?
4. Calcula a i b de manera que el residu de la divisió $3x^3 + 2x^2 + ax + b$ per $x^2 - x + 1$ sigui 0.
5. Calcula el valor de k perquè el residu de la divisió de $x^2 - 6x + k$ per $x - 2$ sigui 2.
6. El polinomi $p(x) = x^2 + bx + c$ és divisible per $x + 1$. Sabem també que, dividint-lo per $x - 1$ i per $x - 3$, dóna la mateixa resta. Troba c i b .
7. Calcula el valor de k perquè el residu de la divisió de $x^2 - \frac{4}{3}x + k$ per $x - \frac{1}{3}$ sigui $\frac{2}{3}$.
8. Calcula el valor de c perquè el polinomi $5x^2 - 7x + c$ sigui divisible per $x + 2$.
9. Calcula el valor de n perquè el polinomi $3x^3 + nx^2 - 7$ sigui divisible per $x + 1$.

Factorització de polinomis.

Factoritzar un polinomi és expressar-lo com un producte de polinomis, del grau més petit possible. No existeix cap mètode mecànic per a factoritzar polinomis, només existeixen tècniques, que poden donar millor o pitjor resultat depenent del context.

Treient factor comú.

Anomenem "treure factor comú" a aplicar la propietat distributiva per generar un parèntesis.

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + \dots = a \cdot (b + c + d + \dots)$$

Treure factor comú és el mètode més elemental per a factoritzar polinomis.

Treu factor comú:

- a) $5x+15$ b) $6x^4+4x^3$ c) $15x^5-12x^4+6x^3$
d) $2a^8b^2+6a^5b^3c-10a^3b^4c^3$

Treu factor comú:

- a) $8a^2-48$ b) $3-9x-18x^2$ c) $50x^5-25x^3$ d) $9y-27x-81x^3$
e) $20x^4-80x^8$ f) $84a+42$ g) $24a-36ab$ h) $30b+5a^2-15a$
i) $-7x^3-28x^6$ j) $44a^2-5b$

Treu factor comú :

- a) $6a^2-9a+3a$ b) $18-14x-12x^2$ c) $42x^5-35x^3$ d) $9-18x-36x^3$
e) $55x^4-15x^7$ f) $48a+12$ g) $2a-3b$ h) $70ab+49a^2-28a$
i) $-8x^3-64x^6$ j) $50a^2-80a$ k) $4a-2a^2+1$
l) $-30x^2+20x^4+50x^2$

Treu factor comú:

- a) $x^2+5x^2-2x^2$ b) $11y^3-33y^3$ c) $45ab^2+9b^2$ d) $6x^2y^3+18x^2$
e) $2(a+b)-3a(a+b)$ c) $8a^2(b+1)-10a(b+1)$
d) $14ab^2c^2(c+8)+12ab^2c^3$ e) $15x^2-30xy^2$ f) $0.06ab^2+0.03a$
g) $\frac{9}{16}(a^2-b^2)+\frac{9}{32}(b^2-a^2)$

Factorització de polinomis per Ruffini.

El mètode de Ruffini és un mètode per tempteig que permet buscar factors lineals, és a dir, aquells que són de la forma $x-a$.

Factoritza els polinomis següents:

- a) x^3-3x^2-6x+8 b) $x^4+x^3-5x^2+x-6$ c) x^3-4x^2-5x
d) $-2x^3+2x^2+18x-18$ e) $x^3-6x^2+11x-6$ f) $3x^3-x^2-7x+5$

Factoritza els polinomis següents:

- a) x^6-81x^2 b) x^3-8 c) $-x^3+25x$

Factoritza els polinomis següents:

- a) $2x^2-4x-30$ b) $4x^2-4x+1$ c) $-3x^2+2x+1$
d) $2x^2-3x+1$ e) $6x^2-5x+1$

Factoritza els polinomis següents:

- a) x^3-3x^2-6x+8 b) $x^3-6x^2+11x-6$ c) $-2x^3+2x^2+18x-18$
d) $3x^3-x^2-7x+5$

Factoritza els polinomis següents:

- a) $x^4+7x^3+5x^2-31x-30$ b) x^5-9x^3 c) $x^4-2x^3-3x^2$
d) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$ e) $2x^5-6x^4-16x^3+24x^2+32x$

Factorització de polinomis per identitats notables.

Les identitats notables permeten trobar factoritzacions de una forma molt elegant.

Fraccions algebraiques. Simplificació de fraccions algebraiques.

Una manera directa de simplificar fraccions algebraiques és intentar dividir numerador entre denominador, aplicant qualsevol dels mètodes estudiats a l'apartat anterior. També podem factoritzar numerador i denominador i "tatxar" els factors repetits.

Simplifica les següents fraccions algebraiques:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{-3x^2 - 5x + 2}{x + 2} & \text{b)} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} & \text{c)} \frac{-2x^4 - 2x^3}{x^3} \\ \text{d)} \frac{x^3 + 8x^2 + 16x + 5}{x^2 + 3x + 1} & \text{e)} \frac{x^6 - 4x^5 + 3x - 12}{x^5 + 3} & \text{f)} \frac{x^3 + 6x^2 + 3x - 10}{x^2 + 4x - 5} \end{array}$$

Simplifica les següents fraccions algebraiques:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{b - 3}{b^2 - 2b - 3} & \text{b)} \frac{7a^3}{14a} & \text{c)} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x - 5} & \text{d)} \frac{6x^2y}{30x} \\ \text{e)} \frac{9x^4y^2z}{x^6y} & \text{f)} \frac{20xyz^3}{60x^2yz^3} & \text{g)} \frac{8a}{a^2 + 3a} & \text{h)} \frac{12x}{3x + 6} \\ \text{i)} \frac{10x - 5x^2}{2x^2} & \text{j)} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{i)} \frac{b^2 - 4}{4b - 8} & \text{l)} \frac{3x + 3}{x^2 - 1} \\ \text{m)} \frac{a + 7}{a^2 + 9a + 14} & \text{n)} \frac{x^2 + 6x + 8}{6x + 24} & \text{o)} \frac{y^2 + 7y + 6}{y^2 + 5y - 6} & \end{array}$$

Suma i resta de fraccions algebraiques.

Igual que passava amb les fraccions, només es poden sumar directament fraccions algebraiques que tinguin igual denominador:

$$\frac{7t}{9} - \frac{2t - 1}{9} = \frac{7t - (2t - 1)}{9} = \frac{5t + 1}{9}$$

Si els denominadors són diferents, cal passar-les al mateix denominador mitjançant fraccions equivalents.

Tanmateix, si les fraccions són senzilles, també podem aplicar la fórmula de la suma de fraccions "multiplicant en creu":

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Calcula les següents sumes i restes, simplificant els resultats obtinguts:

- a) $\frac{9}{3m} + \frac{-12}{3m}$ b) $\frac{-5x}{21} + \frac{12x}{21}$ c) $\frac{3}{x} - \frac{9}{x}$ d) $\frac{t+2}{4} - \frac{t}{4}$
 e) $\frac{y+3}{2} + \frac{4y-6}{2}$ f) $\frac{2x}{8} - \frac{-14x}{8}$ g) $\frac{3c}{4c+1} + \frac{c+1}{4c+1}$ h) $\frac{7k}{k+2} - \frac{6k}{k+2}$
 i) $\frac{-2}{x-5} + \frac{x-3}{x-5}$ j) $\frac{3n}{2n-3} + \frac{n-6}{3-2n}$ k) $\frac{3d-2}{2} + \frac{d+4}{2}$ l) $\frac{a}{a+4} - \frac{8+a}{a+4}$
 m) $\frac{2n}{5n+5} - \frac{n-1}{5n+5}$ n) $\frac{x-4}{1-x} + \frac{2x-5}{x-1}$ o) $\frac{x-9}{x+2} - \frac{2x-12}{x+2}$

Calcula $\frac{5}{2y} + \frac{4}{3y^2}$

$$mcm(2y, 3y^2) = 6y^2$$

$$\frac{5}{2y} + \frac{4}{3y^2} = \frac{5(3y)}{2y(3y)} + \frac{4(2)}{3y^2(2)} = \frac{15y}{6y^2} + \frac{8}{6y^2} = \frac{15y+8}{6y^2}$$

Calcula $\frac{x}{x-1} - \frac{5}{x-2}$

$$mcm(x-1, x-2) = (x-1)(x-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} - \frac{5}{x-2} &= \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} - \frac{5(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)} - \frac{5x-5}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \frac{x^2-2x-(5x-5)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-7x+5}{(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

Calcula les següents sumes i restes, simplificant els resultats obtinguts:

- a) $\frac{1}{2x} - \frac{2}{10x}$ b) $\frac{1}{7x} + \frac{2}{x}$ c) $\frac{10}{xy^2} + \frac{5}{y^2}$ d) $\frac{9}{a^3} - \frac{7}{a}$
 e) $\frac{2}{3x+6} + \frac{5}{x+2}$ f) $\frac{7}{2x-8} - \frac{2}{x-4}$ g) $\frac{2x}{x+1} + \frac{x}{4x+4}$

Calcula les següents sumes i restes, simplificant els resultats obtinguts:

- a) $\frac{5}{x+6} + \frac{3}{x+3}$ b) $\frac{4}{x+3} - \frac{5x}{x-3}$ c) $\frac{7x}{x^2-16} + \frac{2}{x+4}$
 d) $\frac{x}{x-10} - \frac{3}{x^2-100}$ e) $\frac{4x}{x-1} + \frac{-x}{x^2+5x-6}$

Multiplicació i divisió de fraccions algebraiques.

La multiplicació de fraccions algebraiques es fa directament: "Numerador per numerador i denominador per denominador".

La divisió de fraccions algebraiques es fa directament, "multiplicant en creu".

Exemple resultat:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2(3x-2)}{3x^2+x-2} \cdot \frac{1}{4x} &= \frac{2x^2(3x-2)}{(3x-2)(x+1)} \cdot \frac{1}{4x} = \\ &= \frac{2x^2}{x+1} \cdot \frac{1}{4x} = \frac{x}{2(x+1)} = \frac{x}{2x+2}\end{aligned}$$

Determina els següents productes. Presenta el resultat com a fracció simplificada.

a) $\frac{ab^2}{12} \cdot \frac{6}{b}$	b) $(x-8) \cdot \frac{4}{x^2-64}$	c) $\frac{15a}{b^3} \cdot \frac{2b^4}{3}$	d) $\frac{3x^4yz^2}{24y^2} \cdot \frac{4}{x}$
e) $16abc \cdot \frac{ab}{bc^2}$	f) $\frac{25mn^2}{4n} \cdot \frac{10n^3}{5m}$	g) $(2x+8) \cdot \frac{7}{x+4}$	h) $\frac{12(a-1)}{3a} \cdot \frac{a^2}{a-1}$
i) $\frac{x+2}{5} \cdot \frac{2}{x^2+2x}$	j) $\frac{x^2-9}{x-3} \cdot \frac{9x-6}{3}$	k) $\frac{2x-10}{3x} \cdot \frac{6x^2}{x^2-25}$	l) $\frac{x^2+16}{x} \cdot \frac{x}{x+4}$
m) $\frac{4x+2}{2x+6} \cdot \frac{6}{2x^2+7x+3}$	n) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+4x} \cdot \frac{x^2}{x+5}$	o) $\frac{y^2-36}{y+3} \cdot \frac{y-4}{y^2+2y-24}$	
p) $\frac{3x+12}{x^2-x-2} \cdot \frac{2x-2}{6x+24}$	q) $\frac{3x^2-6x-9}{x^2-x-2} \cdot \frac{x^2-4}{6x+12}$		

Realitza les següents divisions:

a) $\frac{2x}{x+1} : \frac{x^2+x}{x+5}$	b) $\frac{x^2+x+1}{x+1} : \frac{x}{x^2-1}$
---	--